Correction DS n°3

Exercice I

On donne les approximations suivantes qui vous serviront au cours de l'exercice :

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25 \qquad 22\ln(3) - 23 \approx 1,17$$

$$\frac{1}{22\ln(2) - 14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3) - 23} \approx 0,86$$

Préliminaire : Polynôme et étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

1. On effectue

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -6X^2 & +11X & -6 & X-1 \\ \cline{5-5}
-\ (X^3 & -X^2) & & & X^2-5X+6 \\ \cline{1-2}
& -5X^2 & +11X & -6 & \\
& -\ (-5X^2 & +5X) & & \\ \cline{2-3}
& & 6X & -6 & \\
& & -\ (6X & -6) & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

2. D'après la question précédente, $P(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 6)$. On étudie alors le polynôme $X^2 - 5X + 6$. Son discriminant est $\Delta = 25 - 24 = 1$. On a alors deux racines

$$X = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad X = \frac{5+1}{2} = 3$$

Le polynôme P se factorise alors

$$\boxed{P(X) = (X-1)(X-2)(X-3).}$$

3. Premièrement, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{2P(e^x)}{e^x} = \frac{2(e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6)}{e^x} \\
\iff &\frac{2P(e^x)}{e^x} = 2\frac{e^{3x}}{e^x} - 12\frac{e^{2x}}{e^x} + 22\frac{e^x}{e^x} - \frac{12}{e^x} \\
\iff &\frac{2P(e^x)}{e^x} = 2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}
\end{aligned}$$

Deuxièmement, en utilisant la forme factorisée du polynôme P, on a

$$\frac{2P(e^x)}{e^x} = \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}.$$

On a donc l'égalité :

$$\boxed{2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x} = \frac{2(e^x-1)(e^x-2)(e^x-3)}{e^x}}$$

4. On a $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, on étudie donc les 3 autres expressions.

$e^x - 1 > 0$	$e^x - 2 > 0$	$e^x - 3 > 0$
$\Longleftrightarrow e^x > 1$	$\Longleftrightarrow e^x > 2$	$\Longleftrightarrow e^x > 3$
$\Longleftrightarrow x > 0$	$\Longleftrightarrow x > \ln(2)$	$\Longleftrightarrow x > \ln(3)$

On dresse le tableau de signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$:

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de e^x-1		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de e^x-2		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de e^x-3		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x}$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Étude d'une fonction

On pose $v : x \to e^{2x} - 12e^x + 22x + 12e^{-x}$ et $h : x \to \dfrac{1}{v(x)}$.

(a) Étude de v.

i. On calcule

$$\begin{aligned} v(\ln(2)) &= e^{2\ln(2)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{-\ln(2)} \\ &= 2^2 - 24 + 22\ln(2) + 6 \\ &= 22\ln(2) - 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\ln(3)) &= e^{2\ln(3)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{-\ln(3)} \\ &= 3^2 - 36 + 22\ln(3) + 4 \\ &= 22\ln(3) - 23 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } v(\ln(2) = 22\ln(2) - 14 \text{ et } v(\ln(3)) = 22\ln(3) - 23.}$$

ii. On a

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{2x}\left(1 - 12\frac{e^x}{e^{2x}} + 22\frac{x}{e^{2x}} + 12\frac{e^{-x}}{e^{2x}}\right) \\ &= e^{2x}\left(1 - 12e^{-x} + 22\frac{x}{e^{2x}} + 12e^{-3x}\right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-3x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ par croissance comparées. Enfin, $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty}$$

On a également

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-x}\left(\frac{e^{2x}}{e^{-x}} - 12\frac{e^{x}}{e^{-x}} + 22\frac{x}{e^{-x}} + 12\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\right) \\ &= e^{-x}\left(e^{x} - 12e^{2x} + 22xe^{x} + 12\right) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ par croissance comparées. Enfin, $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} v(x) = +\infty}$$

iii. La fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad v'(x) = 2e^{2x} - 12e^{x} + 22 - 12e^{-x}$$

En utilisant les questions précédentes et $v(0) = 1$, on trace le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de v	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	≈ 1.25	$\searrow$	≈ 1.17	$\nearrow$	$+\infty$

iv. D'après le tableau de variation précédent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) > 0.}$$

(b) Comme pour tout réel x, $v(x) > 0$,

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de } h \text{ est } \mathbb{R}.}$$

(c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de la fonction v (qui ne s'annule pas). On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

Comme $v^2(x)$ est strictement positif, la dérivée de h est du signe contraire de la dérivée de v. Enfin, on a

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{v(x)} = 0, \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{v(x)} = 0$$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
Signe de $v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	≈ 0.80	$\nearrow$	≈ 0.86	$\searrow$	0

Exercice II - ESCP 2016 - ECT (modifié)

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Script Scilab

```
n = input("Entrez un entier n")
u = 1
for k = 1:n
    u = log(1 + u^2)
end
disp(u)
```

2. On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{0 \leq u_n \leq 1\}$.
   — **Initialisation :** $u_0 = 1$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.
   — **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc

$$\begin{aligned} & 0 \leq u_n \leq 1 \\ \Longrightarrow\ & 0 \leq u_n^2 \leq 1 \\ \Longrightarrow\ & 1 \leq 1 + u_n^2 \leq 2 \\ \Longrightarrow\ & 0 \leq \ln(1 + u_n^2) \leq \ln(2) \leq 1 \\ \Longrightarrow\ & 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

   La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.
   — **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1.}$

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

   (a) La fonction f est dérivable sur $[0, 1]$ en tant que composée et somme de fonction dérivable sur $[0, 1]$ et

$$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2+2x-1}{1+x^2} = \frac{-(1-x)^2}{1+x^2} \leq 0$$

   La fonction f est décroissante. $f(0) = 0$ et $f(1) = \ln(2) - 1$.

x	0 $\qquad$ 1
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	$0 \searrow \ln(2) - 1$

   On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leq 0}$$

   (b) On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. On a donc

$$f(u_n) \leq 0 \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}}$$

(c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0.

$$\boxed{\text{Elle est donc convergente.}}$$

4. (a) On pose la fonction $g : x \to \ln(1+x) - x$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$$

La fonction g est donc décroissante et $g(0) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) \leq 0$, c'est à dire

$$\boxed{\forall x \geq 0, \quad \ln(1+x) \leq x}$$

(b) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 > 0$ et donc, d'après la question précédente

$$\boxed{u_{n+1} = \ln(1+u_n^2) \leq u_n^2.}$$

(c) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \{u_n \leq (\ln 2)^n\}$.

— **Initialisation :** $u_0 \leq 1$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

— **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \leq u_n^2 \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \leq (\ln 2)^n \times (\ln 2)^n \\ \Longrightarrow \quad & u_{n+1} \leq (\ln 2)^{n+1} \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $(\ln 2)^n \leq \ln(2)$ pour $n \geq 1$. La proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition $(\mathscr{P}_n)$ est héréditaire.

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leq (\ln 2)^n.}$

(d) On a pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq (\ln 2)^n$. Comme $\ln 2 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln 2)^n = 0$. Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

(e) Programme Scilab

$$\boxed{6 \text{ est le plus petit entier } n \text{ tel que } |u_n| < 10^{-4}.}$$

(f) Soit $n \geq 2$, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} & u_k \leq (\ln 2)^k \\ \Longrightarrow & \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\ln 2)^k \\ \Longrightarrow & \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{1-(\ln 2)^n}{1-\ln 2} \end{aligned}$$

Exercice III - ESCP ECT 2010 modifié.

La probabilité d'un événement est notée $\mathrm{P}(A)$*, et pour tout événement* B *vérifiant* $\mathrm{P}(B) \neq 0$*, on note* $\mathrm{P}_B(A)$ *la probabilité conditionnelle de* A *sachant* B*.*

Un mobile se déplace aléatoirement le long d'un axe horizontal d'origine O, sur des points à coordonnées entières, positives ou nulles.
Les déplacements sont effectués selon le protocole suivant :
• à l'instant zéro, le mobile est sur l'origine O d'abscisse 0 ;
• si, pour tout entier naturel n, le mobile se trouve à l'instant n sur le point d'abscisse k $(0 \leq k \leq n)$, alors il sera à l'instant $n+1$, soit sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$, soit sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$. Pour tout entier naturel n, soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n. Ainsi $X_0 = 0$. On note $\mathrm{E}(X_n)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X_n.

1. Au temps n°1, le mobile peut être en 1 ou en 0. Ainsi $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$\boxed{X_1 \text{ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre } P(X_1 = 1) = \frac{1}{3}.}$$

2. (a) Le mobile reste sur place ou progresse d'une place. A l'instant 1, le mobile peut donc être en 0 et en 1. A l'instant 2, il peut donc être en 0, 1 ou 2.

$$\boxed{X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}.}$$

(b) $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$ donc l'ensemble $\{[X_1 = 1], [X_1 = 0]\}$ est le système complet d'événements associé à la variable aléatoire. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 0) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P_{X_1=1}(X_2 = 2) \\ &= \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}([X_2 = 0]) = \frac{4}{9}, \qquad \mathrm{P}([X_2 = 1]) = \frac{4}{9} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}([X_2 = 2]) = \frac{1}{9}}$$

(c) On a par définition

$$\begin{aligned} E(X_2) &= 0 \times P(X_2 = 0) + 1 \times P(X_2 = 1) + 2 \times P(X_2 = 2) \\ &= 0 + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient } E(X_2) = \frac{2}{3}.}$$

(d) On calcule d'abord

$$\begin{aligned} E(X_2^2) &= 0 \times P(X_2 = 0) + 1^2 \times P(X_2 = 1) + 2^2 \times P(X_2 = 2) \\ &= 0 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Et donc, d'après la formule de Köenig-Huygens

$$\boxed{V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \frac{8}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}}$$

3. A l'instant n, le mobile peut être dans toutes les positions entre 0 et n. Donc

$$\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, n]\!].}$$

4. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout k de $[\![1, n]\!]$,

(a) *Attention, il y avait une erreur d'énoncé. 0,5 pts bonus pour ceux qui sont parvenus à la corriger.* Pour que le mobile soit en k à l'instant n, il faut qu'il soit à l'instant $n-1$ en $k-1$ (le mobile avancera alors d'un au temps n) ou en k (le mobile devra rester sur place. Autrement dit :

$$\boxed{[X_n = k] = ([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k-1]) \cup ([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k]).}$$

(b) Les deux évènements $([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k-1])$ et $([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k])$ sont disjoints, donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}([X_n = k]) &= \mathrm{P}\left([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k-1]\right) + \mathrm{P}\left([X_n = k] \cap [X_{n-1} = k]\right) \\ &= \mathrm{P}_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k)\mathrm{P}([X_{n-1} = k-1]) + \mathrm{P}_{X_{n-1}=k}(X_n = k)\mathrm{P}([X_{n-1} = k]) \\ &= \frac{1}{3}\mathrm{P}([X_{n-1} = k-1]) + \frac{2}{3}\mathrm{P}([X_{n-1} = k]) \end{aligned}$$

(c) Le mobile ne peut pas se trouver en -1 donc $P(X_{n-1} = -1) = 0$. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\mathrm{P}([X_n = 0]) = \frac{2}{3}\mathrm{P}(X_{n-1} = 0).}$$

(d) On note $a_n = P(X_n = 0)$. La suite (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $a_0 = \mathrm{P}(X_0 = 0) = 1$. On a donc

$$\boxed{a_n = P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.}$$

5. (a) De la même façon, le mobile ne peut pas être en n à l'instant $n-1$ donc $\mathrm{P}(X_{n-1} = n) = 0$ et d'après la question 4.c

$$\boxed{\mathrm{P}([X_n = n]) = \left(\frac{1}{3}\right)\mathrm{P}([X_{n-1} = n-1])}$$

(b) Si l'on note pour tout entier naturel n, $b_n = \mathrm{P}([X_n = n])$, on voit que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $b_0 = \mathrm{P}(X_0 = 0) = 1$ donc

$$\boxed{b_n = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.}$$

6. (a) En utilisant la définition de $\mathrm{E}(X_n)$ et la question 4.(c),on a pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\mathrm{P}([X_{n-1} = k-1]) + \frac{2}{3}\mathrm{P}([X_{n-1} = k])\right)\\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}([X_{n-1} = k-1]) + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n-1} k\mathrm{P}([X_{n-1} = k])
\end{aligned}$$

(b) On remarque tout d'abord que

$$E(X_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} k\mathrm{P}(X_{n-1} = k) = \sum_{k=1}^{n-1} k\mathrm{P}(X_{n-1} = k)$$

A l'aide d'un changement de variable, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{P}([X_{n-1} = k-1]) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\mathrm{P}(X_{n-1} = k-1)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} k\mathrm{P}(X_{n-1} = k-1) + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{P}(X_{n-1} = k-1)\\
&= E(X_{n-1}) + 1
\end{aligned}$$

On a donc

$$E(X_n) = \frac{1}{3}\left(E(X_{n-1}) + 1\right) + \frac{2}{3}\left(E(X_{n-1})\right)$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{3}.}$$

(c) La suite $(\mathrm{E}(X_n))$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $E(X_0) = 0$. On a donc

$$\boxed{E(X_n) = \frac{n}{3}.}$$

Exercice IV -Inspiré d'INSEEC 2002

Il y avait une erreur d'énoncé déstabilisatrice pour la suite. Cet exercice sera donc compté comme une question bonus.

On définit pour tout entier naturel n non nul, le polynôme P_n par : $P_0(X) = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(X) = X^3 P_n'(X) + (2 - 3(n+1)X^2)P_n(X) \tag{1}$$

1. Étude des polynomes
   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$P_{n+1}(0) = 0 + (2-0)P_n(0) = 2P_n(0)$$
   La suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2. On a alors
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(0) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}}$$
   (b) On a $P_0'(X) = 0$ et donc
   $$\begin{aligned} P_1(X) &= X^3 \times P_0'(X) + (2-3X^2)P_0(X) \\ &= 2 \times (2 - 3X^2) \end{aligned}$$
   $$\boxed{P_1(X) = 4 - 6X^2.}$$
   En utilisant la méthode du discriminant, ou par calcul direct, on obtient,
   $$\boxed{\text{Les racines de } P_1 \text{ sont } \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ et } -\sqrt{\frac{2}{3}}.}$$
   (c) On a $P_1'(X) = -12X$ et donc
   $$\begin{aligned} P_2(X) &= X^3 P_1'(X) + (2-6X^2)P_1(X) \\ &= -12X^4 + (2-6X^2)(4-6X^2) \\ &= -12X^4 + 8 - 12X^2 - 24X^2 + 36X^4 \\ &= 24X^4 - 36X^2 + 8 \end{aligned}$$
   Afin de déterminer ses racines, on va poser $Y = X^2$, On a
   $$24X^4 - 36X^2 + 8 = 4(6Y^2 - 9Y + 2)$$
   On étudie les racines de $6Y^2 - 9Y + 2$. Le discriminant est $\Delta = 81 - 48 = 33$ et donc les racines sont
   $$Y_1 = \frac{9+\sqrt{33}}{12}, \qquad Y_2 = \frac{9-\sqrt{33}}{12}$$
   Comme $9 - \sqrt{33} > 0$, on a quatre racines pour P_2,
   $$\boxed{\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}},\quad -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}},\quad \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}} \text{ et } -\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}}$$
   (d) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n$: {P_n est de degré $2n$}.
   - **Initialisation :** P_0 est de degré 0 donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.
   - **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc P_n un polynôme de degré $2n$.

— P_n' est de degré $2n-1$ et donc X^3P_n' est de degré $2n+2$.

— P_n est de degré $2n$ et $(2-3(n+1)X^2)$ est de degré 2 donc $(2-3(n+1)X^2)P_n(X)$ est de degré $2n+2$

P_{n+1} étant la somme de deux polynôme de degré $2n+2$, c'est un polynôme de degré au moins $2n+2$. On s'intéresse à son coefficient dominant. Si on note a_n le coefficient dominant du polynôme P_n alors

$$a_{n+1} = 2na_n - 3(n+1)a_n = -(n+3)a_n \neq 0$$

— **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ Le polynôme } \mathrm{P}_n \text{ est de degré } 2n.}$

2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$

(a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) &= \frac{-6}{x^4}e^{-1/x^2} + \frac{2}{x^3} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}.\\ &= \frac{-6x^2+4}{x^6}e^{-1/x^2}\end{aligned}$$

De même, f' est dérivable en tant que produit, composée et quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f''(x) &= \frac{-12x \times x^6 - 6x^5(-6x^2+4)}{x^{12}}e^{-1/x^2} + \frac{-6x^2+4}{x^6} \times \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}.\\ &= \frac{-12x^4 - 6x^2(-6x^2+4)}{x^9}e^{-1/x^2} + \frac{-12x^2+8}{x^9}e^{-1/x^2}.\\ &= \frac{-12x^4+36x^4-24x^2-12x^2+8)}{x^9}e^{-1/x^2}\\ &= \frac{24x^4-36x^2+8}{x^9}e^{-1/x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a finalement } f'(x) = \frac{P_1(x)}{x^6}e^{-1/x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{P_2(x)}{x^9}e^{-1/x^2}}$$

(b) On calcule les limites,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x^3} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x^2} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to+\infty} 2y^{3/2}e^{-y} = 0 \quad \text{(par croissance comparée)}$$

D'après les questions précédentes, on déduit

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-3/2}$	$\nearrow$	0 ‖ 0	$\nearrow$	$2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 e^{-3/2}$	$\searrow$	0

(c) On détermine la convexité en regardant le signe de f''. D'après la question 1.c

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}$		$\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}$		0		$\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}$		$\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction est donc convexe sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}\right[$, sur $\left]-\sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}, 0\right[$, sur $\left]0, \sqrt{\frac{9-\sqrt{33}}{12}}\right[$ et sur $\left]\sqrt{\frac{9+\sqrt{33}}{12}}, +\infty\right[$. Elle est concave sur les autres intervalles.

(d) On conjecture

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}.}$$

(e) On montre les propriétés suivantes $\mathscr{P}_n : \left\{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}\right\}$.

- **Initialisation :** $f^{(0)} = f$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{P_0(x)}{x^{3(0+1)}} e^{-1/x^2}$ donc la propriété $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.
- **Hérédité :** On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour un certain rang n. On a donc la formule pour la dérivée $n$ème de f. $f^{(n)}$ est alors dérivable en tant que composée, produit et quotient de fonctions dérivables et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)x^{3(n+1)} - 3(n+1)x^{3n+2}P_n(x)}{x^{6n+6}} e^{-1/x^2} + \frac{P_n(x)}{x^{3n+3}} \times \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \\ &\textit{On simplifie le premier quotient par } x^{3n} \\ &= \frac{P_n'(x)x^3 - 3(n+1)x^2P_n(x) + 2P_n(x)}{x^{3n+6}} e^{-1/x^2} \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+2)}} e^{-1/x^2}\end{aligned}$$

  La proposition P_{n+1} est donc vraie. On en déduit que la suite des proposition (P_n) est héréditaire.
- **Conclusion :** $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3(n+1)}} e^{-1/x^2}.}$

3. En scilab, un polynôme peut être modélisé par une matrice ligne ne comportant que les coefficients du polynôme. Ainsi la matrice $[2, 3, 5]$ correspondra au polynôme $P(X) = 2 + 3X + 5X^2$.

(a) La matrice $[1, 0, 2, 4]$ correspond au polynôme $\boxed{1 + 2X^2 + 4X^3}$

(b) La matrice correspondant à $\boxed{P_1(X) \text{ est } [4, 0, -6]}$.

La matrice correspondant à $\boxed{P_2(X) \text{ est } [8, 0, -36, 0, 24]}$.

(c) La matrice sera de $\boxed{\text{taille } n+1}$

(d) Compléter la fonction suivante qui pour un polynôme quelconque, permet d'obtenir le polynôme dérivée :

```
function Q = derive(P)
    n = size(P) \\permet d'obtenir la taille de la matrice P
    if n == 1
        Q = [.0.]
    else
        Q = zeros(1,.n-1.)
        for k = 1 : .n-1.
            Q(k) = .k*P(k+1).
        end
    end
endfunction
```